OPERA I — APPENDICI AVANZATE (Vol. 2)

FONDAZIONE MISURA-TEORICA, SELEZIONE MISURABILE, SUFFICIENZA, ROBUSTEZZA

Pierernesto Di Paolo

ANNO: 2026

Tutti i diritti riservati

1. SELEZIONE MISURABILE DELL'ARGMAX

Problema:
Se l'argmax individuale non è unico, esiste una selezione misurabile u*(z)?

Setup:

Sia $(\mathcal{Z}, \Sigma)$ spazio misurabile standard boreliano.
Sia U compatto metrico.
F: $\mathcal{Z} \times U \to R$ misurabile in z e continua in u.

Definiamo la corrispondenza:

$\Gamma(z) = \text{Argmax_u } F(z,u)$

Teorema (forma operativa di selezione):

Se $\Gamma(z)$ è non vuoto e compatto per ogni z e il grafo di Γ è misurabile, allora esiste una funzione misurabile:

$u^*(z) \in \Gamma(z)$

Questa è la base misura-teorica che garantisce esistenza di decisione individuale ben definita.

Conseguenza:
La teoria non dipende da unicità globale.

2. CASO NON UNICITÀ DELL'OTTIMO

Definiamo insieme degli ottimi:

$\Gamma(z)$

Completezza aggregativa forte richiede:

$\exists u0$ tale che $u0 \in \Gamma(z)$ per quasi ogni z.

Teorema:

Se esistono z1,z2 tali che $\Gamma(z1) \cap \Gamma(z2) = \emptyset$ su insiemi di probabilità positiva, allora nessuna decisione costante può essere ottimo quasi ovunque.

Questo rafforza l'impossibilità aggregativa.

3. VERSIONE MISURA-TEORICA COMPLETA

Spazio $L^1(P)$.
Decisione aggregata dipende solo da integrale.

Definiamo equivalenza:

F1 ~ F2 se F1(z,u) = F2(z,u) q.o.

Il decisore aggregativo opera sul quoziente $L^1/\sim$.

Il decisore individuale opera sulla funzione puntuale.

La compressione è mappa naturale:

$C: L^1 \to R$

$C(f) = \int f \, dP$

Non è iniettiva salvo funzioni costanti.

Quindi perdita informazionale è strutturale.

4. SUFFICIENZA STATISTICA (COLLEGAMENTO A LE CAM)

Sia S(Z) statistica.

S è sufficiente per la decisione se:

Argmax_u E[F(Z,u) | S] = Argmax_u E[F(Z,u)]

Se esiste statistica costante sufficiente, sistema è aggregativamente completo.

In generale, statistica costante non è sufficiente se interazione non separabile.

Questo collega la teoria al concetto classico di sufficienza.

5. ROBUSTEZZA CONTRO RUMORE AVVERSARIALE

Considera errore:

$z_hat = z + \varepsilon + a$

dove a è disturbo avversariale limitato:

$||a|| \leq \delta_a$

Bound del regret:

$Reg \leq C0\ (||e||^2 + \delta_a^2)$

Quindi robustezza richiede controllo δ_a.

6. ESTENSIONE A SPAZI INFINITI-DIMENSIONALI

Se U è spazio di Hilbert separabile e F Gateaux-differenziabile con Hessiano coercivo, la derivazione locale resta valida sostituendo matrici con operatori lineari continui invertibili.

Questo estende teoria a controllo funzionale.